



TITLE:

# 相関次元を応用した金融時系列の 非線形性検定

AUTHOR(S):

足立, 光生

---

CITATION:

足立, 光生. 相関次元を応用した金融時系列の非線形性検定. 経済論叢  
1999, 164(1): 31-49

ISSUE DATE:

1999-07

URL:

<https://doi.org/10.14989/45287>

RIGHT:

# 經濟論叢

第164巻 第1号

---

第二次世界大戦期の国際決済銀行（5）……………西牟田 祐 二 1

相関次元を応用した  
金融時系列の非線形性検定……………足 立 光 生 31

持株会社の会計問題と会社法規定……………金 森 絵 里 50

閉鎖集団における主体の依存関係の均衡（2）…藤 山 英 樹 67

国民健康保険制度に関する経済分析（1）……………小 松 秀 和 82

---

平成11年7月

京 都 大 学 経 済 学 會

## 相関次元を応用した金融時系列の非線形性検定\*

足 立 光 生

### は じ め に

本稿では時系列への包括的な非線形検定法として近年注目を浴びている BDS 検定について考察する。従来，非線形モデルの包括的検定法構築は困難とされており，通常行われる非線形検定は特定モデルを対象としていた。その中で，Bispectrum 検定（Hinch [1982]）が代表的な包括的非線形検定法であったといえる。しかしこの検定は3次のキュミュラントのフーリエ変換で定義される Bispectrum の性質を利用するため，これが0になる場合は検出力が弱いという欠点が従来から指摘されていた。

本稿が考察の対象とする BDS 検定は Brock, William A., Dechert, W. D., Scheinkman, Jose の3者により1987年に開発された時系列の iid<sup>1)</sup> 検定である。すなわち BDS 検定量は「 $H_0$ : 1 変量時系列データが iid に従う」という仮説検定を行うものである。BDS 検定は母集団分布の非特定という点でノンパラメトリック検定であるが，この検定においてユニークな点は，検定を特徴づける性質が決定論的 chaos の枠組みに由来することである<sup>2)</sup>。本稿ではまず最初に BDS 検定の概要を考察する準備として，次元測定法に関する論点の整理を chaos を中心に行う（第 I 節）。そしてここで使われた相関積分を用いて，

\* 当研究に関しては文部省科学研究費補助金（日本学術振興会特別研究員奨励費）を受けた。ご指導を頂いた京都大学大学院経済学研究科占川順教授に深く感謝する。なお当然のことだが，本稿の間違いは筆者の責任による。

1) Independent Identically Distributed の略，独立・同一分布。

2) BDS 検定の中心的役割をはたす相関積分は，統計学的観点から U 統計量の特殊ケースとしても定義可能である。

BDS 検定の実際の計算法について触れる (第Ⅱ節)。その後、実際の時系列に対して BDS 検定を行う (第Ⅲ節)。

ところで金融時系列の iid 帰無仮説棄却は重要な意味を持つと考えるべきであろう。金融市場では派生商品のプライシングモデルとして原証券 (Underlying Security) の iid (標準ブラウン運動の性質) を強く仮定しているため、帰無仮説が仮に棄却された場合、派生商品のプライシングには慎重な対処が要求されることになる。これも併せて考察する (第Ⅳ節)。

#### 本稿の貢献

本稿の主たる貢献として以下の3点が挙げられる。まず第1に日経平均収益率に対して BDS 検定を行った結果、時系列の非 iid 性を再提起した点、第2に自己回帰過程による残差への検定が従来強調されているほど重要でないことを示した点、第3に iid 帰無仮説棄却とオプションプライシング選択との関係を考察している点、である。

### I Chaos アトラクタと BDS 検定

BDS 検定がユニークな点は、その検定法の開発が chaos 理論に大きく依存した点である。BDS 検定は従来の統計学的枠組みの中でも解釈を可能とするが、本節では BDS 検定開発の初期の出発点となった chaos について簡単に考察をおこなう。

決定論的 chaos は、非常に簡単な非線形方程式に従い、引き伸ばしと折り畳みを複数回繰り返す手法を用いて、雑音として扱われてきた現象を決定論で説明できる (といわれている)。決定論的な系では、現在の状態が確定することによって将来の状態が一意的に確定される。ゆえに時系列データの中に決定論的 chaos が存在するのであれば、予測手段はごく単純な方程式で、より有意になるであろう。なぜならば古典的な「線形の方程式+確率的揺動項」による予測方法では、計測と予測は確率的揺動項に大きく依存しているからである。

近年 chaos 研究の昂揚として工学時系列だけでなく経済マクロ時系列、金

融時系列の中にもカオスを発見しようという試みが行われてきた。それはこれらの時系列に chaos 系アトラクタ (attractor)<sup>3)</sup> を発見しようとする試みであった。以下ではアトラクタの存在を認証する方法を得るため、重要な次元計測法を3点挙げる。

### 1 容量次元

$n$  次元空間  $R^n$  中の図形を1辺  $l$  の立方体、または半径  $l$  の  $n$  次元球で被覆 (covering) するために必要な最小数を  $\nu(l)$  とする。容量次元 (Capacity Dimension) を  $\text{Dim}_c(l)$  とおくと

$$\text{Dim}_c(l) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \nu(l)}{\log(1/l)} \quad (1.1)$$

となる。

### 2 情報次元

容量次元で用いる被覆には確率の大小を問わず、1辺  $l$  の立方体、または半径  $l$  の  $n$  次元球が確率の低い部分まで被覆してしまう可能性が残る。これで膨大な測定時間を要する。ここで  $n$  次元空間  $R^n$  中の図形を1辺  $l$  の立方体、または半径  $l$  の  $n$  次元球の中に含まれる点の個数について考える。観測点の総数が  $\nu$  であるとして、 $i$  番目に含まれる点の個数を  $n_i$  とすると、 $i$  番目に含まれる集合の確率は  $p_i = n_i/\nu$  となる。このとき情報次元 (Information Dimension) を  $\text{Dim}_I(l)$  とすると

$$\text{Dim}_I(l) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{-\sum_i p_i(l) \log p_i(l)}{\log(1/l)} \quad (1.2)$$

と定義できる。

3) chaos が決定論であるということは、その dynamics を構成する変数 ( $n$  個) は  $n$  次元空間にプロットした場合、ある軌道を構築する。アトラクタはこの軌道に変数を引き寄せる。散逸力学系 chaos において相空間の体積は時間とともに減少し、 $t \rightarrow \infty$  でアトラクタの体積は0になる。

### 3 相関次元

Grassberger & Procaccia [1983] の相関次元 (Correlation Dimension) は上記2つの次元測定に対して、極めて簡単なアルゴリズム (ヘヴィサイド関数の導入) を提供した。そのことは実証研究者にとって chaos 系アトラクタ測定を容易にした。またここで用いられている相関積分 (Correlation Integral) の着想は以降解説する BDS 統計量の中心部分に継承されている。

$d$  次元ベクトルの時系列  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_T\}$  が与えられた時, 2 体相関関数の積分=相関積分を  $C(l)$  とすれば

$$C(l) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T(T-1)} \sum_{i < j} I_l(Z_i, Z_j)$$

$$\text{ただし } I_l(Z_i, Z_j) = \begin{cases} 1 & \|Z_i - Z_j\| < l \\ 0 & \|Z_i - Z_j\| \geq l \end{cases} \quad (1.3)$$

となる<sup>4)</sup>。相関次元を  $\text{Dim}_{\text{cor}}(l)$  とすれば

$$\text{Dim}_{\text{cor}}(l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log C(l)}{\log l} \quad (1.4)$$

## II BDS 検定の概要

経済時系列での chaos の存在を巡って, 80年代以降様々な実証分析が行われた。最も初期の実証分析に見られる構図は「相関次元の飽和→アトラクタ次元の計測→chaos の存在」という単純な方法に依る。しかしその後, 上記の方法では chaos 存在の証明としては不適切で, 多種多様な前提条件が必要であるという批判が相次ぎ, 相関次元の飽和のみで chaos を証明していた時代は終焉を迎えた。しかし相関次元を応用して (chaos を証明するのではなく) 「非線形性」を証明しようとする研究が80年代後期に盛んとなった。時系列データが偏って分布するアトラクタの存在は, chaos の存在証明には十分でないとしても, 時系列データの非 iid 性を証明するには十分であると考えられる。Brock, William A., Dechert, W. D., Scheinkman, Jose はこれを BDS 検定に結

4)  $\| \cdot \|$  は最大値ノルム (sup-norm) であるが, Euclid 距離等, 距離の定義を満たすものであればよい。

びつけた。

#### BDS 統計量の計算の手順

- 〈1〉 検定したい時系列の観測値 (データ)  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_T\}$  を採取する。
- 〈2〉  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_T\}$  の集合で連続する  $N$  次元のベクトル (これを  $N$  ヒストリーと定義する) すなわち  $X_t^N = (X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+N-1})'$  を作る。
- 〈3〉 2組の観測集合  $X_t^N = (X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+N-1})'$ ,  $X_s^N = (X_s, X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_{s+N-1})'$  を用意する。これら2組の  $N$  ヒストリーの距離を測るために前節で用いた相関積分 (Correlation Integral) の定義を導入する。ここでは相関積分を  $l$  と  $t$  の関数として

$$C_N(l, T) = \frac{2}{(T-N)(T-N+1)} \sum_{t < s} I_t(X_t^N, X_s^N)$$

$$\text{ただし } I_t(X_t^N, X_s^N) = \begin{cases} 1, & \|X_t^N - X_s^N\| < l \\ 0, & \|X_t^N - X_s^N\| \geq l \end{cases} \quad (2.1) \text{ とおく。}$$

- 〈4〉 ここで  $N$  と  $l$  を固定して  $T \rightarrow \infty$  とした場合、確率1で

$$C_N(l, T) \rightarrow C_1(l)^N$$

になると定義する。このとき Brock, Dechert, and Scheinkman は

$$[C_N(l, T) - C_1(l)^N] \sqrt{T}$$

は正規分布となることを示している。この分布は平均1であり、

$$C = C(l) = \int [F(z+l) - F(z-l)] dF(z)$$

$$V = V(l) = \int \int [F(z+l) - F(z-l)]^2 dF(z) \quad (2.2)$$

とした場合、分散は

$$\sigma_N^2(l) = 4V^N + 8 \sum_{j=1}^{N-1} V^{N-j} C^{2j} + 4(N-1)^2 C^{2N} - 4N^2 V C^{2N-2} \quad (2.3)$$

である。

- 〈5〉 ここで  $C(l)$  の不偏推定量を

$$C_1(l, t) = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t < s} I_t(X_t, X_s) \quad (2.4)$$

とおく。また  $V(I)$  の不偏推定量を

$$V(I, T) = \frac{6}{(T-N-1)(T-N)(T-N+1)} \sum_{i < s < r} I_i(X_i, X_s) I_i(X_s, X_r) \quad (2.5)$$

とおき、分散を

$$\begin{aligned} \sigma_N^2(I, T) = & 4[V(I, T)]^N + 8 \sum_{i=1}^{N-1} [V(I, T)]^{N-1} [C_1(I, T)]^{2i} \\ & + 4(N-1)^2 [C_1(I, T)]^{2N} \\ & - 4N^2 [V(I, T)] [C_1(I, T)]^{2N-2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

と書き直す。

〈6〉 BDS 統計量は正規化して

$$BDS = \frac{[C_N(I, T) - C_1(I, T)^N] \sqrt{T}}{\sigma_N(I, T)} \quad (2.7)$$

となる。BDS 統計量は

「 $H_0$ : 変量時系列データ  $\{X(t)\}$  が iid に従う」の下でデータ数  $n \rightarrow \infty$  のとき漸近的に標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

### III 日経平均に対する BDS 検定

本節では東京証券取引所上場株式に対して BDS 検定を行う。ただし個別株式を対象とすれば、bid-offer spread の乖離に見られるように、市場に厚みがない時系列を引用してしまう可能性が残る。そこで日経平均を対象として BDS 検定を行うことにする。また過去10年間(1988年1月初~1997年12月末)の終値におけるデータを扱い、1年毎に検定を行う。

#### 1 検定1 日経平均収益率

まず日経平均収益率に対して BDS 検定を行う。(取り扱うデータの基礎統計量は第1表)

BDS 検定を行う前に、代表的な iid 検定である連検定 (runs test) を行ってみた。連検定を採用する理由は、パラメトリックな仮定を採用しない点で



第1表 日経平均収益率基本統計量 (1988-1997年)

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標 本 数	272	248	245	245	246
平 均	0.001292937	0.001016595	0.00197732	-0.00018834	-0.00138596
標準偏差(n)	0.00714333	0.005501701	0.020520275	0.013321197	0.01872996
標準偏差(n-1)	0.007156497	0.005512827	0.020562281	0.013348467	0.018768145
分 散(n)	5.10272E-05	3.02687E-05	0.000421082	0.000177454	0.000350811
分 散(n-1)	5.12155E-05	3.03913E-05	0.000422807	0.000178182	0.000352243
最 小 値	-0.02209107	-0.01860606	-0.06826707	-0.06135085	-0.04327326
中 央 値	0.0012944	0.000811458	-0.00165615	-0.0013857	0.046889151
最 大 値	0.054795568	0.024882996	0.124303278	0.046889151	0.072749239
範 囲	0.076886639	0.043489057	0.192570345	0.108240005	0.116022499
第1四分位数	-0.00242011	-0.00230501	-0.01371917	-0.00720584	-0.01264229
第3四分位数	0.005602984	0.004603268	0.008092928	0.007093437	0.009562344
歪 度	1.19811986	0.155387054	0.820778668	-0.04485818	0.442135257
尖 度	13.78047918	4.512232554	8.574799677	5.418363807	4.062089466
変動係数	5.524888068	5.411891107	-10.3778468	-70.7286447	-13.5140641
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標 本 数	245	246	248	246	244
平 均	0.00010039	0.0005165	3.75395E-05	-0.00025563	-0.00099381
標準偏差(n)	0.012900959	0.011226046	0.014283267	0.00959259	0.017587389
標準偏差(n-1)	0.012927368	0.011248933	0.014312151	0.009612147	0.01762354
分 散(n)	0.000166435	0.000126024	0.000204012	9.20178E-05	0.000309316
分 散(n-1)	0.000167117	0.000126538	0.000204838	9.23934E-05	0.000310589
最 小 値	-0.03949048	-0.05068387	-0.05761099	-0.03237499	-0.0543048
中 央 値	3.41573E-05	0.000486157	-1.6418E-05	0.000169624	-0.00043202
最 大 値	0.050368037	0.07550922	0.06078712	0.034826946	0.076604814
範 囲	0.089858517	0.12619309	0.11839811	0.067201937	0.130909609
第1四分位数	-0.00561145	-0.00604981	-0.00821576	-0.00637237	-0.01080504
第3四分位数	0.006914014	0.006382895	0.007856434	0.005856677	0.0084615
歪 度	0.249898097	0.856857192	0.105844069	-0.15464037	0.040987607
尖 度	4.816008464	11.6633507	5.163396283	3.720960836	4.694675881
変動係数	128.5088097	21.73485931	380.4865095	-37.5248802	-17.696984

第2表 日経平均収益率に対する連検定

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
統 計 量	-0.9093	0.19076	-2.1722*	-1.91665	2.231832*
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
統 計 量	1.40554	0.574091	0.444766	1.721758	2.497043*

注：判定はいずれも\*は5%水準で，\*\*は1%水準で有意。

第3表 日経平均収益率の標準偏差/spread

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標準偏差/spread	0.092907	0.126508	0.10656	0.123071	0.161434
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標準偏差/spread	0.14557	0.088959	0.120638	0.142743	0.134348

BDS 検定と同様であり比較対象としては適当であると考えられたからである。(検定の結果は第2表) 連検定では、10年度中7年度で iid 帰無仮説を棄却できず、残りの3年度に関しても5%水準では棄却できるものの1%水準では棄却出来ない。すなわち年度において程度の差はあるものの、総じて連検定の結果は日経平均収益率の iid 性を示している。

次に同じデータに対して BDS 検定を行った。BDS 検定の計算に必要な距離  $l$  の決定は、標準偏差/spread が一応の目安とされる。1988年～1997年までの標準偏差/spread は第3表のとおりである。ここから0.05の幅で上下1本ずつ設定する。例えば1988年度は標準偏差/spread は0.092907なので  $l$  を0.042907, 0.092907, 0.142907の3通り設定する。

また埋込次元数  $m$  に関しては、それぞれの年度で飽和する相関次元を採用するのが適当であるかもしれないが、前述のように相関次元の測定においては様々な制約条件が必要とされる。そこで金融時系列は5前後で相関次元が飽和する可能性が高いことから、整数次元  $m = 4, 5, 6$  の3種類を適用する。すなわち年度毎に9検定 ( $l$ : 3種類  $\times$   $m$ : 3種類) を行うこととする。

第4表 BDS 検定 (日経平均収益率)

1988年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.092907)

	$I=0.042907$	$I=0.092907$	$I=0.142907$
次元数 $m=4$	5.3684**	3.9816**	4.7343**
5	6.0903**	4.1125**	4.6204**
6	7.4493**	3.9222**	4.4145**

1989年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.126508)

	$I=0.076508$	$I=0.126508$	$I=0.176508$
次元数 $m=4$	1.5504	1.6531*	1.65474*
5	0.77319	1.4071	1.6661*
6	0.35905	1.2123	1.6547*

1990年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.10656)

	$I=0.05656$	$I=0.10656$	$I=0.15656$
次元数 $m=4$	11.335*	8.2497**	6.2328**
5	15.280**	10.050**	7.4468**
6	19.835**	12.844**	8.5839**

1991年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.123071)

	$I=0.073071$	$I=0.123071$	$I=0.173071$
次元数 $m=4$	0.3393	0.40069	0.57115
5	0.7129	0.93388	1.2323
6	1.0868	1.8304*	2.0325*

1992年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.161434)

	$I=0.111434$	$I=0.161434$	$I=0.211434$
次元数 $m=4$	3.3034**	4.4986**	4.3444**
5	3.3861**	4.7542**	4.5906**
6	2.9879**	4.9821**	4.7302**

1993年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.14557)

	$l=0.09557$	$l=0.14557$	$l=0.19557$
次元数 $m=4$	3.3821**	3.8191**	3.2022**
5	4.4285**	4.7959**	3.7894**
6	5.2557**	5.6162**	4.1902**

1994年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.088959)

	$l=0.038959$	$l=0.088959$	$l=0.138959$
次元数 $m=4$	1.4494	3.6521**	4.0344**
5	0.96163	4.2303**	4.7090**
6	0.2210	4.4925**	5.1521**

1995年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.120638)

	$l=0.070638$	$l=0.120638$	$l=0.170638$
次元数 $m=4$	0.58294	0.22621	0.21369
5	0.8595	0.20338	0.10657
6	0.89857	0.20294	0.23036

1996年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.142743)

	$l=0.092743$	$l=0.142743$	$l=0.192743$
次元数 $m=4$	1.2265	0.75948	1.4824
5	1.9404*	1.2531	1.9243*
6	3.1726**	1.3471	2.0872*

1997年度日経平均収益率 (標準偏差/spread=0.134348)

	$l=0.084348$	$l=0.134348$	$l=0.184348$
次元数 $m=4$	2.8636**	4.0145**	5.2592**
5	2.2531*	4.2353**	5.8052**
6	1.8913*	4.3001**	6.1521**

注: 判定はいずれも\*は5%水準で、\*\*は1%水準で有意。

BDS 検定の結果は第4表となった。BDS 検定は連検定に比べれば iid 帰無仮説を棄却する可能性が非常に高い。たとえば連検定を例にとってみれば1988年度は p 値が36%もあるのに対し、BDS 検定はどの次元 ( $m=4, 5$ ,

6) においても1%水準で帰無仮説を棄却する。しかし BDS 検定でいずれの次元 ( $m = 4, 5, 6$ ) でも帰無仮説を棄却しない95年度は、連検定でも同様に帰無仮説を棄却しない。すなわち BDS 検定は連検定の補完的検定になるとは断定できないことにも注意すべきであろう。

その他の事項として標準偏差/spread の選択について考える。標準偏差/spread から  $l$  の水準を拡張しても10年度中6年度は判定結果については全く変化しなかった。(94年度のみは  $l$  を下方に変化させた場合明確な差が認められた。) 総じて日経平均収益率では  $l$  の選択に関してそれほど拘る必要はないといえよう。

## 2 検定2 日経平均収益率の AR 1 残差テスト

自己回帰過程 AR 1 にあてはめ、その残差に対して BDS 検定を行う。理由は BDS 検定は線形の自己相関ですら過剰に反応してしまうことがこれまでの考察の中で指摘されているからだ。検定の方法 ( $l, m$  の採択) は前出の検定と同じである。(基礎統計量=第5表, 標準偏差/spread=第6表, 検定結果=第7表)

検定結果は検定1の収益率に対する検定結果と比べほとんど差がなかった。日経平均等の金融時系列に関しては、従来その必要性を強調されていた残差テストを必ずしも行う必要はなく、収益率の直接検定で十分であるといえよう。

第5表 日経平均収益率 AR 1 残差基本統計量 (1988年-1997年)

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標 本 数	282	249	245	246	246
平 均	4.4762E-06	-2.8792E-07	1.33478E-06	-1.6247E-06	1.83452E-06
標準偏差(n)	0.007191195	0.005487247	0.020415729	0.013295273	0.018870758
標準偏差(n)	0.007204402	0.005498299	0.020457522	0.013322379	0.018909231
分 散(n)	5.17133E-05	3.01099E-05	0.000416802	0.000176764	0.000356106
分 散(n)	5.19034E-05	3.02313E-05	0.00041851	0.000177486	0.000357559
最 小 値	-0.023024	-0.019962	-0.063014	-0.060829	-0.041997

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
中 央 値	-4.0378E-05	-0.00011491	-0.00089139	-0.00113725	-0.0006203
最 大 値	0.052483	0.023973	0.12983	0.046609	0.073586
範 囲	0.075507	0.043935	0.192844	0.107438	0.115583
第1四分位数	-0.0038752	-0.0034061	-0.011429	-0.00708438	-0.01149075
第3四分位数	0.0043251	0.0036986	0.0097331	0.007606675	0.01085325
歪 度	1.085620898	0.164754772	0.965151644	-0.02378644	0.437725233
尖 度	12.63174121	4.60639418	9.184930187	5.413715277	3.98471419
変 動 係 数	1606.541023	-19058.2562	15295.15951	-8183.22157	10286.50357
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標 本 数	245	247	249	247	245
平 均	1.8298E-07	-9.9888E-07	3.29783E-07	2.24379E-05	3.05955E-06
標準偏差(n)	0.012902199	0.011172621	0.014242031	0.009763409	0.017381108
標準偏差(n)	0.012928611	0.011195307	0.014270715	0.009783233	0.017416689
分 散(n)	0.000166467	0.000124827	0.000202835	9.53242E-05	0.000302103
分 散(n)	0.000167149	0.000125335	0.000203653	9.57117E-05	0.000303341
最 小 値	-0.040015	-0.05074	-0.057108	-0.030197	-0.055952
中 央 値	-0.00024919	-6.3119E-05	-0.00076533	0.00075935	0.00052141
最 大 値	0.050299	0.074426	0.059549	0.037171	0.074553
範 囲	0.090314	0.125166	0.116657	0.067368	0.130505
第1四分位数	-0.0058507	-0.00670365	-0.0083674	-0.0059932	-0.0095629
第3四分位数	0.0067413	0.005909	0.0081036	0.00638395	0.0092271
歪 度	0.246086785	0.821227435	0.109900306	0.061063342	-0.01405885
尖 度	4.833203959	11.5275957	4.982141423	4.239920937	4.634571647
変 動 係 数	70511.68104	-11185.1648	43186.04919	435.1309871	5680.934353

第6表 日経平均収益率 AR 1 残差の標準偏差/spread

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標準偏差/spread	0.095239	0.124895	0.105867	0.123748	0.163266
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標準偏差/spread	0.142859	0.089262	0.122085	0.144927	0.133183

第7表 BDS 検定 (日経平均収益率 AR 1 残差)

1988年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.09525)

	$l=0.04525$	$l=0.09525$	$l=0.14525$
次元数 $m=4$	4.8181**	4.3012**	5.1925**
5	6.0666**	4.4025**	5.1095**
6	8.2292**	4.0525**	4.8767**

1989年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.124895)

	$l=0.074895$	$l=0.124895$	$l=0.174895$
次元数 $m=4$	0.99363	1.3004	1.6637*
5	0.11340	0.95636	1.6119
6	0.22008	0.86017	1.5011

1990年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.105867)

	$l=0.055867$	$l=0.105867$	$l=0.155867$
次元数 $m=4$	10.825**	8.9310**	6.4296**
5	14.745**	11.230**	7.7358**
6	19.132**	13.618**	8.8732**

1991年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.123748)

	$l=0.073748$	$l=0.123748$	$l=0.173748$
次元数 $m=4$	0.31252	0.40338	0.53541
5	0.47038	0.99146	1.1934
6	1.2466	1.8136*	1.9924*

1992年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.163266)

	$l=0.113266$	$l=0.163266$	$l=0.213266$
次元数 $m=4$	2.9940**	4.4207**	4.2736**
5	3.1061**	4.6874**	4.5113**
6	2.8100**	4.9476**	4.6561**

1993年度日経平均収益率 AR 1 残差率 (標準偏差/spread=0.142859)

	$t=0.092859$	$t=0.142859$	$t=0.192859$
次元数 $m=4$	3.1356**	3.7553**	3.2739**
5	4.0458**	4.6983**	3.8670**
6	4.8118**	5.4884**	4.3018**

1994年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.089262)

	$t=0.039262$	$t=0.0889262$	$t=0.139262$
次元数 $m=4$	1.2807	3.6762**	3.9710**
5	1.0158	4.2173**	4.7549**
6	0.1156	4.4003**	5.2412**

1995年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.122085)

	$t=0.072085$	$t=0.122085$	$t=0.172085$
次元数 $m=4$	0.14469	0.023814	0.20378
5	0.48217	0.045312	0.071895
6	0.68328	0.39061	0.18438

1996年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.144927)

	$t=0.094927$	$t=0.144927$	$t=0.194927$
次元数 $m=4$	0.13963	0.068448	0.44363
5	1.0378	0.44512	0.90737
6	1.9670*	0.53638	1.0903

1997年度日経平均収益率 AR 1 残差 (標準偏差/spread=0.133183)

	$t=0.083183$	$t=0.133183$	$t=0.183183$
次元数 $m=4$	2.6163**	3.5070**	4.8958**
5	2.3441**	3.7112**	5.3951**
6	1.6645*	3.6827**	5.7119**

注: 判定はいずれも\*は5%水準で, \*\*は1%水準で有意。



### 3 検定3 日経平均に対する検定(参考)

あくまでも参考事例として日経平均の収益率ではなく、そのままのデータに対して BDS 検定を行う場合を考察する。(基礎統計量=第8表, 標準偏差/spread=第9表, 検定結果(概要)=第10表)

iid 帰無仮説の高い棄却が当初予想されるため, 前の2検定よりも検定範囲を拡張して行う。距離  $l$  の選択に関して標準偏差/spread  $\pm .025$  と  $\pm .05$  の計

第8表 基礎統計量(日経平均未加工データ1988年-1997年)

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標 本 数	273	249	246	246	247
平 均	27038.23971	34058.81329	29437.17911	24295.57276	18108.64571
標準偏差(n)	1809.280902	1887.07475	44864.554925	1512.363173	1972.27828
標準偏差(n)	1812.603735	1890.875513	4874.472479	1515.446486	1976.28291
分 散(n)	3273497.382	3561051.128	23663894.62	2287242.368	3889881.615
分 散(n)	3285532.299	3575410.205	23760481.95	2296578.051	3905694.142
最 小 値	21217.04	30183.79	20221.86	21456.76	14309.41
中 央 値	27469.6	33954.99	30077.045	24090.72	17555
最 大 値	30159	38915.87	38712.88	27146.91	23801.18
範 囲	8941.96	8732.08	18491.02	5690.15	9491.77
第1四分位数	26315.35	32913.09	24395.0025	23113.415	16887.56
第3四分位数	27967.32	35116.02	32670.7575	25688.305	18786.585
歪 度	-0.97044718	0.48265083	0.082472581	0.147329736	0.730666778
尖 度	3.597446434	2.987937191	1.816458419	1.827240099	2.802598928
変 動 係 数	0.066915632	0.055406357	0.165252075	0.062248509	0.108913627
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標 本 数	246	247	249	247	245
平 均	19100.00439	19935.89717	17329.70382	21088.35324	18397.51882
標準偏差(n)	1537.134786	718.370493	1334.433809	716.6888217	1464.132346
標準偏差(n)	1540.268601	719.8291148	1337.121493	718.1440289	1467.129549
分 散(n)	2362783.349	516056.1652	1780713.59	513642.8671	2143683.525
分 散(n)	2372427.363	518153.9545	1787893.887	515730.8462	2152469.113
最 小 値	16078.71	17369.74	14485.41	19161.71	14775.22

中 央 値	19766.235	19919.38	17621.18	21020.36	18341.96
最 大 値	21148.11	21552.81	20011.76	22666.8	20681.07
範 囲	5069.4	4183.07	5526.35	3505.09	5905.85
第1四分位数	17389.69	19530.855	16387.25	20608.015	17647.45
第3四分位数	20395.7725	20510.225	18176.27	21634.375	19705.17
歪 度	-0.46105842	-0.40739486	-0.15571493	-0.00674987	-0.33815974
尖 度	1.636405651	3.272311298	2.295921767	2.610214163	2.475889833
変 動 係 数	0.080478243	0.036034019	0.07700269	0.033985054	0.079583142

第9表 日経平均標準偏差/spread

年度	1988	1989	1990	1991	1992
標準偏差/spread	0.202336	0.216108	0.263077	0.265786	0.207788
年度	1993	1994	1995	1996	1997
標準偏差/spread	0.303218	0.171733	0.241467	0.204471	0.247912

第10表 BDS 統計量 (日経平均未加工データ1988年-1997年) まとめ

年 度	1988	1989	1990	1991	1992
標 本 数	75	75	75	75	75
平 均	29.114732	18.623028	664.7960133	11.958136	132.0402
最 小 値	7.2221	6.9137	24.088	6.8742	11.996
中 央 値	23.675	12.951	45.348	10.02	34.393
最 大 値	145.54	41.231	15616	28.236	2211.6
レ ン ジ	138.3179	34.3173	15591.912	21.3618	2199.604
第1四分位数	11.926	8.9014	35.7855	7.8467	22.6415
第3四分位数	32.7485	29.683	171.6	14.9885	67.4475
年 度	1993	1994	1995	1996	1997
標 本 数	75	75	75	75	75
平 均	11.08948267	16.08069333	22.858392	12.28655467	22.89616267
最 小 値	6.8742	6.8874	6.9137	6.8874	6.861
中 央 値	10.02	12.742	15.906	10.04	17.026
最 大 値	23.512	42.423	70.276	31.407	66.416
レ ン ジ	16.6378	35.5356	63.3623	24.5196	59.555
第1四分位数	7.8467	8.6093	10.079	7.89095	10
第3四分位数	13.7885	19.2975	31.701	15.015	31.826

5 本, また埋込次元  $m$  の決定に関して 2 次元から 16 ( $=2^4$ ) 次元までのかなり広い範囲を扱う。すなわち年度毎に 75 検定 ( $l: 5$  種類  $m: 15$  種類) を行う。

検定の範囲を拡張したにも関わらず, 当初の予想通り非常に高い水準で帰無仮説を棄却している。(750 検定全てが 1% 水準で iid 帰無仮説を棄却)

たしかに非常に有意に帰無仮説を棄却しているものの, この検定自体が日経平均の非 iid 性を主張しているとするのは行き過ぎである。この検定結果は逆に「未加工データを用いては正確な検定が困難であること」を示唆していると考えるのが自然であろう。

#### 4 BDS 検定結果からの示唆

第Ⅲ節の結果から, 日経平均収益率の非 iid 性を再提起できると考えられる。また第Ⅲ節の結果から日経平均収益率に対しては (従来強調されていた) 自己回帰過程の残差テストはそれほど重要でないことも考えられる。

ところで時系列の iid 帰無仮説棄却は様々な意味を持つが, 取引市場を持った金融時系列にとって, その意味は特に大きい。具体的には派生商品プライシングの再考を迫られるケースが想定される。金融市場では金融派生商品 (オプション) のプライシングモデルの殆どが, Underlying Security の変化を記述する道具として確率微分方程式を採用しており, iid 帰無仮説が棄却された場合そのプライシング法に関しては見直しが必要とされよう。

〈手続き〉

- (1) iid 帰無仮説棄却 →
- (2) 原資産価格収益率の変動を, ブラウン運動を基底とする変動 (算術ブラウン運動, 幾何ブラウン運動等) で記述することが困難。

〈証明〉

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  が完備である<sup>5)</sup>として, ブラウン運動  $W(t)$  ( $0 < t$

5) 加法族の標準的増大系が定義されている。また確率測度  $P$  が拡張されており零集合  $N$  にたいして  $P(N) = 0$  とする。

$<\infty$ ) の性質は

- ①  $W(0)=0$  a.s.,  $W(t)$  は  $t=0$  において連続,
- ② 任意の  $t_1, t_2$  ( $0 < t_1 < t_2 < \infty$ ) で  $W(t_2) - W(t_1)$  は平均 0, 分散  $t_2 - t_1$  の標準正規分布に従う。
- ③ 全ての背反な区間にある増分は互いに独立。

である。以上の性質が、(帰無仮説を棄却した場合の) 検定結果と矛盾することよりあきらめ。 □

- (3) 伊藤の公式<sup>6)</sup> 適用が困難。
- (4) 派生商品評価には、原資産収益率変動に対しての新しい記述体系が必要。それが確立できない場合には、時系列の特性を備える dynamics を付加することが最低限必要。

### お わ り に

相関次元は、chaos というカテゴリーではなく、時系列分析という新たなカテゴリーで、非線形性証明の方法を与えることとなった。なかでも BDS 検定は古典的ノンパラメトリック検定、あるいは線形仮説下の独立性検定 (パラメトリック検定) とは全く違ったアイデアを軸とする。本稿での日経平均に対する BDS 検定による検定結果が、BDS 検定の方法、また今後の派生商品のプライシングモデルを見直すきっかけとなることを期待する。

### 参 考 文 献

- 刈屋武昭・照井伸彦 [1997] 『非線形経済時系列分析法とその応用』岩波書店。
- 高木康順・秋山裕・田中辰雄 [1997] 『応用計量経済学 1』多賀出版。
- 舟木直久 [1997] 『確率微分方程式』岩波書店。
- Black, F. and M. Scholes [1973] "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- Brock, W. A., Hsieh, David A., Lebaron, Blake [1991] *Nonlinear Dynamics, Chaos*,

6) 舟木 [1997] 等を参照せよ。

- and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, MIT Pr.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., Scheinkman, J. A. and Lebaron, B. [1996] "A Test for Independence based on the Correlation Dimension," *Econometric Reviews*, 15, pp. 197-235.
- Brock, W. A., de Lima, P. J. [1996] "Nonlinear Time Series, Complexity Theory, and Finance" in *Handbook of Statistics*, ed. by Maddala, G. S., and Rao, C. R., 14, pp. 317-361, North-Holland.
- de Lima, P. J. [1996] "Nuisance Parameter Free Properties of Correlation Integral Based Statistics," *Econometric Reviews*, 15, pp. 237-259.
- Grassberger & Procaccia [1983] "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica D*, 9, pp. 189-208.
- Hinch, M. J. [1982] "Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series," *Journal of Time Series Analysis*, 3, pp. 169-176.
- Hsieh, D. A. [1989] "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates," *Journal of Business*, Vol. 62, No. 3, pp. 339-368.
- Scheinkman, J. A., Lebaron, B. [1989] "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business*, Vol. 62, No. 3, pp. 311-337.